

# 應用數位數學教學模式於國中一年級一元一次方程式 的教學成效

劉建巖<sup>1</sup> 陳明璋<sup>2</sup> 李源順<sup>3</sup> 王筱娟<sup>4</sup>

## 摘要

本研究主要目的在探討使用「數位數學教育模式」和「傳統教育模式」兩種不同教學方式，對國中一年級在單元「一元一次方程式」之學習成效的差異。

研究採用準實驗研究法進行教學實驗，研究對象實驗組有 98 位學生，控制組有 100 位學生，實驗組為研究者原任課班級，控制組則是另一位教學風格相近的數學老師進行教學。實驗組的數位數學教育模式是以 NAEP 評量架構為理論基礎、AMA 簡報系統為設計教材軟體，過程中特別重視學生溝通能力的培養。控制組則是一般講述式教學的傳統教育模式。

實驗研究結果獲得以下結論：

- 一、學生的整體學習成效和保留成效方面，實驗組皆優於的控制組。
- 二、學生在數學能力之概念、程序、解題性知識的立即成效表現和保留成效方面，實驗組皆優於控制組。
- 三、學生在數學評量低、中、高複雜度的立即成效表現和保留成效，實驗組皆優於控制組。
- 四、接受數位數學教育模式的教學後，實驗組學生溝通表現有進步。

**關鍵詞：**一元一次方程式、NAEP 評量架構、AMA

---

<sup>1</sup> 國立交通大學理學院在職專班研究生 ganuobibi@msn.com

<sup>2</sup> 國立交通大學通識教育中心 mjchen@mail.nctu.edu.tw

<sup>3</sup> 臺北市立教育大學數學資訊教育學系 leeys@tmu.edu.tw

<sup>4</sup> 桃園縣立同德國中 vulrm00117@yahoo.com.tw

# Teaching Effectiveness of using Electronic Mathematical Instruction Model on Seventh Graders in One-Variable Linear Equation

Jian-Yan Liou<sup>5</sup> Ming-Jang Chen<sup>6</sup> Yuan-Shuen Li<sup>7</sup> Shiau-Jiuan Wang<sup>8</sup>

## Abstract

The purpose of this study was to compare the learning effects in one-variable linear equation for seventh grade students by using two different teaching methods : the electronic mathematics instruction and the traditional teaching.

A quais-experimental approach was used in this research. There were 98 students in the experimental group and 100 students in the control group. The teacher of the experimental group was the researcher and the teacher of the control group was another teacher whose teaching method was similar to the researcher's method. The teaching method of experimental group was Electronic Mathematical Instruction which was based on the NAEP assessment framework as a theoretical foundation and on the Multimedia Principle as electronic teaching materials . Control group used the traditional teaching method.

The final conclusions are as follows :

1. The experimental group performed better than the control group for the whole students in the immediate effect and retained effect.
2. The experimental group performed better than the control group for the whole students in the immediate effect and retained effect on the concept, procedures, problem-solving knowledge.
3. The experimental group performed better than the control group for the whole students in the immediate effects and retained effects on low, average, high mathematical assessment complexity.

---

<sup>5</sup> 國立交通大學理學院在職專班研究生 ganuobibi@msn.com

<sup>6</sup> 國立交通大學通識教育中心 mjchen@mail.nctu.edu.tw

<sup>7</sup> 臺北市立教育大學數學資訊教育學系 leeys@tmu.edu.tw

<sup>8</sup> 桃園縣立同德國中 vulrm00117@yahoo.com.tw

4. After using Digital Mathematics Education, the ability of the experimental group's communication had been progressed.

**Keywords : Electronic Mathematics Instruction 、 AMA 、 One-Variable Linear Equation 、 NAEP mathematics assessment**

# 應用數位數學教學模式於國中一年級一元一次方程式 的教學成效

劉建巖 陳明璋 李源順 王筱娟

## 壹、緒論與研究目的

Herscovis&Kieran(1980)認為一元一次方程式是由國小算術思維進入國中代數思維重要的階段，轉換過程的理解程度將會影響到往後數學學習成效。研究者教學經驗中，發現多數學生開始放棄數學大多是因為無法有效將算術思維轉換成代數思維。由文獻探討得知學生透過激發式動態來呈現代數課程(洪榮忠，2008；謝東育，2009；葉子榕，2010；廖真瑜，2011)有成效。數學教育研究(李源順、余新富、李勇諭，2006)發現也能提升學生的學習成效，因此結合兩種理論，形成數位數學教育教學模式進行教學研究。研究的主要目的使用美國數學教育成就評量(National Assessment of Education Progress,[NAEP])評量架構搭配 AMA 系統的「數位數學教育教學模式」和「傳統教育模式」於一元一次方程式的學習成效，其探討問題如下：

比較數位數學教育模式與傳統教育模式的教學方法，學生的學習成效是否顯著差異？

比較數位數學教育模式與傳統教育模式的教學方法，學生在數學能力面向的學習成效是否顯著差異？

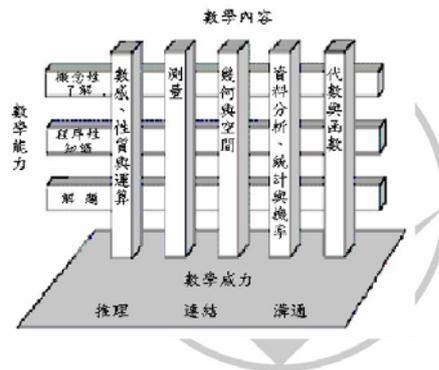
比較數位數學教育模式與傳統教育模式的教學方法，學生在試題複雜度的學習成效是否顯著差異？

採用數位數學教育的教學方法後，實驗組學生的溝通能力是否有改變？

## 貳、文獻探討

有關數學教育裡理論美國 NAEP 提出數學內容(Mathematical Content Strands)、數學能力(Mathematical Abilities)、數學威力(Mathematical Power)三個因子的評量架構，如 0，做為探究數學內容、教學與評量的理論基礎(引自李源順,2005)。數學內容知識就是我們所要教與學的主要內容，沒有它，我們便談不上數學的教與學了。1999-2003 年 NAEP 將數學內容分成數感、性質與運算、測量、幾何與空間、資料分析、統計與機率，以及代數與函數等。數學能力可以看成是學生在特定的數學知識內展現的能力，數學能力包含概念性了解(Conceptual Understanding)、程序性知識(Procedural Knowledge)和解題(Problem Solving)三個因子。現今數學教育的理念是要培養學生的數學威力，希望學生有全面性的能力

能結合和使用數學知識去進行探究、臆測、邏輯推理、解決非例行性的問題；能在數學脈絡之內，或其他的學科脈絡進行連結；以及能進行數學的溝通。因此數學威力是由推理(Reasoning)、連結(Connections)、溝通(Communication)三個因子組成。2005 年 NAEP 又針對試題提出高、中、低複雜度的分類，做為學生解答問題難度的理論且編撰試題複雜度的理想平衡是有一半的題目為中複雜度試題，其他由低、高複雜度的試題均分。



美國 NAEP 評量架構圖

資料來源：“The 1990–2003 Mathematics Framework”by National Center for Education Statistics, National Assessment of Educational Progress (NAEP), from <http://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/previousframework.asp>

有關數位學習的多媒體學習理論 Mayer(2009)整合多位學者專家針對多媒體學習提出三大假設：1.雙通道假設：當訊息被呈現時，可藉由文字或是圖像選擇聽覺或視覺通道。2.有限容量假設：人在每個通道中，同時處理的訊息量是有限的。3.主動處理假設：接收到訊息時學習者有組織、選擇、整合三階段的主動處理歷程。Mayer 以此三個假設為基礎，提出十二項多媒體教材設計原則，強調如何幫助學習者雙通道充分發揮功能。內含資訊理論的教學能培養與提升教師和學生的資訊素養，使教學時可以呈現多元化的教材還能提供豐富教學資源並在過程中提供學習對話、互動及反思，增進思考與解決問題的能力(張基成,1997；張國恩,1999；劉世雄,2002；陳淑貞,2004)。

許多學者研究中提出，當學生在進入代數單元學習時，會遭遇許多問題是因為小學過度注重四則運算和算術技巧，到國中階段才突然大量引進代數符號，讓學生產生適應上的困難，導致產生一些迷思概念。同時學者(洪榮忠，2008；謝東育，2009；葉子榕，2010；廖真瑜，2011)的研究發現，學生經過運用數位理論的激發式動態(activata mind attention, [AMA])教學後，教師適時的口語引導與視覺引導對於學生在一元一次方程式、二元一次方程式的學習成效有明顯助益。

在此本研究結合數學教育理論與數位教育理論，稱為數位數學教育模式，希望能協助教師於課堂上教學。相信透過數位數學教育模式的教學環境下，教師因使用資訊科技理論融入教學，節省原本許多上所需要的版書時間，學生因而有更多時

間發表自己的想法，與同學溝通，再經由數學教育理論能提升學生推理、溝通、連結的能力，進而提升學習成效。本研究所運用的數學教育理論即為 NAEP 所要培養學的數學能力與溝通能力，至於連結與解題能力現在篇幅暫不加以探討。所運用的數位教育理論為結合 Mayer(2009)多媒體學習理論的 AMA 系統。

## 參、研究方法

本研究採用準實驗研究法進行教學實驗，實驗組教師是研究者原任課班級，控制組教師則是另一位教學風格相仿的數學老師進行教學。自變項為實驗組接受數位數學教育的教學模式，過程中特別重視學生溝通能力的培養，控制組進行一般黑板板書且教學少與學生互動的傳統教育模式，其中實驗組與控制組分別有 98、100 位受測學生，每一單元教學時間為 4 節課，施測 1 節課，共 5 節課，總施測時間為 15 節課。依變項為學習成就測驗。研究流程為準備、預試、前測、實驗教學、後測、問卷與晤談、延後測、整理數據、撰寫研究結果九個階段。研究資料中有成就測驗的量化資料和質性晤談，其中資料分析方法將其測驗得分率之前測採用獨立樣本 T 檢定，後測與延後測使用共變數分析。研究工具分為「實驗教材設計」，其中研究教材皆為課本題目，實驗組將其題目自行設計教材，兩組教材差異如 0、0。「成就測驗試卷」是參考相關單元學生易迷思概念的文獻(王如敏, 2004)和參考專家及校內數學教師意見編製而成，具內容效度與專家效度，且測驗 Cronbach  $\alpha$  係數為 0.910，具有內部一致性。計分方式除了應用題依作答情形分段給分外(最低 0 分、最高 4 分)，其餘是非題、問答選擇題、計算題為答對 1 分，答錯 0 分，滿分為 43 分。

The image shows two examples of solving linear equations. The left example (control group) shows a standard step-by-step process:  $(1) -2(2x-1) = -x+5$  leads to  $-4x+2 = -x+5$ , then  $-4x = -x+3$ ,  $-3x = 3$ , and  $x = -1$ . The right example (experimental group) shows a more structured approach:  $(1) -2(2x-1) = -x+5$  is rearranged to  $-4x+2 = -x+5$ , then  $-4x+2+x = -x+5+x$  to get  $-3x+2 = 5$ , and finally  $-3x = 3$  and  $x = -1$ . The experimental group's method uses more explicit annotations for each step.

計算題教材差異(左圖為控制組教材，右圖為實驗組教材)

The image shows two examples of solving word problems. The left example (control group) is a word problem about buying items: '買了一些橘子... 買了一些蘋果... 共付 140 元... 請問買了一些橘子和買了一些蘋果的價錢分別為多少元?'. The right example (experimental group) is a similar word problem but with a different set of numbers: '買了一些橘子... 買了一些蘋果... 共付 180 元... 請問買了一些橘子和買了一些蘋果的價錢分別為多少元?'. The experimental group's solution shows a clear system of equations:  $\begin{cases} x + 2y = 180 \\ 2x + y = 100 \end{cases}$  and the solution  $\begin{cases} x = 100 \\ y = 40 \end{cases}$ .

應用題教材差異(左圖為控制組教材，右圖為實驗組教材)

## 整體學習成效分析

由 0 可發現在概念性知識與低複雜度兩向度起始能力達顯著差異，其餘皆未達顯著水準，表示兩組在概念與低複雜度起始行為有所差異的，因此後測、延後測皆進行共變數分析以排除前測對後測、延後測的影響。

學習成就測驗前測成績一覽表

前測 變項	實驗組 (n = 98)		控制組 (n = 100)		<i>t</i>	<i>p</i>	95% <i>CI</i>		<i>d</i>
	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>			<i>LL</i>	<i>UL</i>	
總得分率	0.28	0.15	0.32	0.161	-1.726	.086	-0.082	0.005	-0.245
概念得分率	0.40	0.14	0.47	0.175	-3.128	.002*	-0.115	-0.026	-0.444
程序得分率	0.31	0.21	0.37	0.234	-1.855	.065	-0.120	0.004	-0.264
解題得分率	0.17	0.20	0.17	0.177	-0.102	.919	-0.056	0.051	-0.015
低複雜得分率	0.42	0.15	0.49	0.18	-3.074	.002*	-0.118	-0.026	-0.436
中複雜得分率	0.19	0.19	0.21	0.20	-0.826	.410	-0.078	0.032	0.117
高複雜得分率	0.03	0.13	0.03	0.12	0.150	.881	-0.031	0.036	0.021

表示\* $p < .05$

由 0 可以發現經過教學實驗後，實驗組在總成績、數學能力與數學評量複雜度的 P 值皆小於 0.05，即達顯著差異，表示在排除共變項(前測成績)對依變項的影響後的實驗效果顯著，亦即對於國一學生數位數學教育模式的立即成效優於傳統教育模式。

學習成就測驗後測共變數分析表

來源	<i>df</i>	<i>F</i>	<i>p</i>	$\eta^2$
總成績	1	39.510	.000*	.168
概念	1	21.739	.000*	.100
程序	1	15.737	.000*	.075
解題	1	15.899	.000*	.075
低複雜	1	24.226	.000*	.111
中複雜	1	18.754	.000*	.088
高複雜	1	11.038	.001*	.054

表示\* $p < .05$

由 0 可以發現經過教學實驗後一個月，實驗組在總成績、數學能力與數學評量複雜度的 P 值皆小於 0.05，即達顯著差異，表示在排除共變項(前測成績)對依變項的影響後的實驗效果顯著，亦即對於國一學生數位數學教育模式在總成績、概念、程序、解題性知識及低、中、高複雜度的保留成效優於傳統教育模式。

學習成就測驗延後測共變數分析表

來源	<i>df</i>	<i>F</i>	<i>p</i>	$\eta^2$
總成績	1	33.567	.000*	.146
概念	1	27.439	.000*	.123
程序	1	16.271	.000*	.077
解題	1	11.062	.001*	.054
低複雜	1	27.946	.000*	.125
中複雜	1	16.146	.001*	.076
高複雜	1	5.283	.023*	.026

表示\* $p < .05$

學生於數學威力之溝通的表現

探討實驗組學生是否可以在經過教學實驗後，透過文字敘述或是數學算式來表達自己的概念和想法，因此研究者於成就測驗試題中設計一道問題，學生的答對率如 0。

成就測驗文字、算式解說溝通表現

由 0 可得知，經過教學實驗後，能利用文字或是算式進行溝通的答對比利大幅提高，而經過教學 1 個月後，答對比例稍微下降。

文字解說概念題答對率

題號	題目	答對率		
		前測	後測	延後測
5(1)	下列算式等號是否恆成立? $30 - 10x = 20x$	13%	52%	40%
5(2)	下列算式等號是否恆成立? $2(x - 2) = (-x + 1) - (-3x + 5)$	3%	47%	38%

有上面分析的依據後，再將學生作答情形加以分類，分析如 0。發現學生在作答時，由於 5(1)問題較為簡單，因此學生於後測以文字說明的比例較計算說明高，但延後測可能學生因為時間關係導致部分概念忘記，反而以計算方式來說明的比例較多。5(2)問題較 5(1)複雜，所以學生在後測、延後測皆是以計算說明居多，答對率較低也是因為部分學生在計算過程中出錯導致最後結果錯誤。也有部分學生計算出結果後但因為不清楚恆成立的概念，導致作答錯誤，0~0 為學生各題各類型實際作答狀況。

學生文字解說題作答情形各類型比例

題號	正確		錯誤		
	文字解說	計算解說	觀念不清	計算錯	空白

5(1)	後測	30%	22%	22%	4%	21%
	延後測	17%	23%	22%	2%	34%
5(2)	後測	13%	34%	8%	17%	28%
	延後測	10%	28%	12%	15%	35%

### 文字解說正確

試問：下列等式何種情況成立？試說明原因

(1) ( 否 )  $30 - 10x = 20x$   
原因：因為 30 沒有  $x$ ，不能直接計算。

(1) ( 否 )  $30 - 10x = 20x$   
原因： $30 - 10x - 20x = 0$ 、 $30 - 30x = 0$   
30 要減 30 才會等於 0，所以  $x$  只能等於 1，不算是成立。

(2) ( 是 )  $2(x-2) = (-x+1) - (-3x+5)$ 。  
原因：這樣的算，有很多種答，所以是!!

### 計算解說正確

(1) ( X )  $30 - 10x = 20x$   
原因： $30 = 30x$   
 $1 = x$

(2) ( 是 )  $2(x-2) = (-x+1) - (-3x+5)$ 。  
原因： $2x - 4 = -x + 1 + 3x - 5$   
 $2x - 4 = 2x - 4$

### 觀念不清

(1) ( 0 )  $30 - 10x = 20x$   
原因：若  $x=1$   $30 - (10 \times 1) = (20 \times 1)$   $30 - 10 = 20$   
 $10x$  的  $x$  會 =  $20x$  的  $x$

(2) ( X )  $2(x-2) = (-x+1) - (-3x+5)$ 。  
原因：因為  $2x - 4 = -x + 1 + 3x - 5$ ， $2x - 4 = 2x - 4$ ， $0x = 0$ ，因此這題並非

### 計算錯

(1) ( 0 )  $30 - 10x = 20x$   
原因： $30 = 20x + 10x$   $30 = 30x$   $x = x$   $x = 0$

(2) ( X )  $2(x-2) = (-x+1) - (-3x+5)$ 。  
原因： $2x - 2 = -x + 1 + 3x - 5$   
 $2x - 2 = 2x - 4$   $2x - 2 \neq 2x - 4$

### 課堂的溝通表現

課堂進行實驗共 12 節課，根據錄影內容，整理出學生於實驗初期、中期、後期的上課紀錄文字稿，如 0，發現學生於三個階段的溝通表現有逐漸進步。

**實驗初期：**學生一開始是不太習慣發表自己的想法與觀念，被點到要回答時會不太敢表達自己的想法，甚至會怕講錯被同學笑，因此對於教師的提問，常以不知道、沒反應或是以簡短幾句話來應對。

**實驗中期：**學生也開始習慣此上課模式。實驗中期教學教材也開始進入數位教材，一開始學生反應興奮，因為第一次數學課利用電腦上課，因此搭配課堂討論與分享自己想法的上課模式，學生普遍比以往更能集中精神於課堂上，且因為瞭解即使分享錯誤想法，並不會受到同學嘲笑或是責罵，因此沒反應的狀況稍有改善。

**實驗後期：**學生的表達能力慢慢進步，漸漸能將自己的想法完整的說出，並且能很大方的說出其他的解法，也會在上課提問一些解法是否正確。

### 課堂記錄

實驗時間	對話內容
初期	<p>T：為什麼要把「×」改寫成「·」，或省略不寫，給你們 1 分鐘討論看看。</p> <p>T：原來討論是這麼安靜的啊！S27 你認為呢？</p> <p>S27：.....</p> <p>T：S12 講講看，不對也沒關係。續下頁</p> <p>S12：不知道</p> <p>T：好，那我舉個例子好了，請問現在黑板寫的這是什麼意思 <math>3xx</math>。</p> <p>S1：3 百多</p> <p>S29：3 乘 x</p> <p>S30：3 叉叉</p>
中期	<p>T：大家現在都會 <math>2x=3</math>，這種題型的解法了，那現在投影幕上的 <math>2x-1=3</math> 這題和 <math>2x=3</math> 有什麼差別？</p> <p>S18：就多一個減 1 而已啊！</p> <p>T：很好，那請問一下，如果沒有了減 1，那這樣會做嗎？</p> <p>SA：會</p> <p>T：這一題如果是你，你會怎麼做？給你們想一下，等一下請人回答。</p> <p>T：有沒有自願的？</p> <p>S16：就 <math>x=2</math> 啊！</p> <p>T：你是怎麼算出來的，一步一步來，慢一點。</p> <p>S16：就先兩邊一起加 1，然後再除以 2</p>
後期	<p>T：還是請 S28，你講講看下一步你怎麼做。</p>

<p>S28：就一顆梨子多 10 元就換 2 顆蘋果，所以 <math>\frac{400-x}{10} = 2x+10</math>， 可是 <math>x</math> 解不出來，會變分數</p> <p>T：她的方程式有沒有問題？</p> <p>S5：老師，他的+10 擺錯邊了。</p> <p>T：爲什麼？</p> <p>S5：因爲是一顆梨子多 10 元，要再給老闆 10 元，才能換 2 顆蘋果， 所以 <math>\frac{400-x}{10} + 10 = 2x</math> 才對。</p> <p>T：你們覺得誰講的是對的？</p> <p>SA：S5。</p> <p>T：好，那這邊有沒有發現這樣很難做，所以老師提供另外一個解 法。我們還是看一顆梨子多 10 元，給老闆 10 元後，能換 2 顆 蘋果，這句話，我們剛剛已經知道是梨子+10 = 2 顆蘋果，如 果用這句話我們假設蘋果 <math>x</math>，那這樣梨子要怎麼表示，S21？</p> <p>S21：嗯..... <math>2x-10</math> 吧？</p> <p>T：沒錯，有信心一點。那這樣都假設好了，請問一下 5 顆蘋果、 梨子 10 顆，共付 400 元，這樣方程式就列出來了。（續下頁）</p> <p>S10：老師，那如果我 10 顆梨子都拿去換，我再給老闆 100 元，這 樣就換到 20 顆蘋果，這樣總共就有 25 顆蘋果，就知道一顆蘋果 20 元了，這樣做對嗎？</p>
---

#### 肆、結論

接受數位數學教育教學模式下，對於整體受測學生學習成效有幫助。

接受數位數學教育教學模式下，對於整體受測學生的數學能力之概念、程序、解  
題性知識的學習成效有幫助。

接受數位數學教育教學模式下，對於數學評量低、中、高複雜度的學習成效有幫  
助。

接受數位數學教育的教學方法後，學生溝通能力明顯有進步。

#### 伍、建議

- 一、 溝通能力需長期訓練以便達更好成效。
- 二、 等待學生回答過程可多給學生一些時間思考。

## 參考文獻

- 李源順、余新富和李勇諭(2006)。同分母分數加法的教學研究。科學教育研究與發展季刊，2006 專刊，114-141。
- 袁媛(1993)。國中一年級學生的文字符號概念與代數文字題的解題研究，國立高雄師範大學教育研究所論文。
- 王如敏(2004)。國二學生解一元一次方程式錯誤類型分析研究。國立高雄師範大學數學系所碩士論文。
- 黃美齡(2009)。運用 EME Model 於帶分數、假分數及其互換之教學研究。台北市立教育大學數學資訊教育教學碩士學位。
- 林光賢、林福來、郭汾派(1989)。國中生文字符號概念的發展。國科會專題研究計畫報告。
- 盧雪梅(2000)。美國的全國教育進展評量(NAEP)。人文及社會學科教學通訊，11-1，143-153
- 曾明義(2008)。NAEP2007 評量架構在台灣國小學生之數學成就評量發展模式之應用。國立台北教育大學數學教育研究所碩士論文。
- 曾椿惠(2010)。激發式動態呈現學習成效與認知負荷影響之研究-以一元一次方程式應用題列式為例。國立交通大學理學院在職專班科技與數位學習組碩士論文。
- Clark,R.C.,&Mayer,R.E.(2003).E-learning and the science of instruction：proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning.San Francisco,CA：Jossey-Bass/Pfeiffer.
- Mayer,R.E.(2005).The cambridge handbook of multimedia learning.Cambridge：Cambridge University Press.
- Mayer,R.E.(2009).Multimedia learning.New York：Cambridge University Press.
- Sweller,J.(2010).Element interactivity and intrinsic,extraneous,and germane cognitive load.*Education Psychology Review*,22,123-138.