

乘法直式算則的學習探究

李源順(2002):乘法直式算則的學習探究。台北市立師範學院學報，33，539-562。

李源順 Yuan-Shun Lee

台北市立師範學院數學資訊教育學系

Department of Mathematics and Computer Science Education, Taipei Municipal Teachers College

Add：台北市立師範學院數學資訊教育學系
(100)台北市愛國西路一號

Tel：23113040-1511

頁首短題：直式算則的學習探究

摘要

九年一貫數學學習領域課程綱要能力指標的訂定有些並沒有做過實徵性的研究，而且教學時數也相對減少。因此，有必要對課程的編排做適當的安排。其中，「嘗試理解乘、除直式算則」明列於第三階段，它是受到八二年課程標準編輯委員的影響。同時一些家長、教師和數學教授們對於八二年版數學課程的反對聲浪中曾以乘、除法計算過程做為批判數學教學的例子。居於上述理由，本文的研究目的在檢視九年一貫數學學習領域能力指標 N-3-2「能嘗試理解乘、除直式算則」的編排是否恰當。也就是在探究現行八二年版架構下，學童計算全數乘法算式時的程序性知識學習荷負，以及五年級學童對全數乘法直式算則的理解，進而提出九年一貫數學課程中乘法直式算則學習時機的建議。

研究方法採本文分析，以及問卷調查。文本分析以國立編譯館主編的數學教科書(簡稱國編本)為對象，主要是因為有些修訂八二年版數學課程標準的委員參與國編本教科書的編著，所以國編本教科書最能詮釋八二年課程標準的精神。接受問卷調查的學童也是四年半以來都以國編本為教科用書的 102 位台北市學童，他們最能反應八二年課程的學習負荷。

文本分析發現，三年級以前學童幾乎需要使用累加的方式計算問題且需做乘法表徵的轉換，四年級以上的學童計算乘法問題需做「幾千」和「幾個千」兩種形式的位值概念轉換和一種等價關係的轉換，而且需要使用多步驟的算式。問卷調查發現，五年級學童習慣於「幾千」的位值概念乘法，而較不習慣於「幾個千」的位值概念乘法；他們可以以「幾千」的位值概念理解乘法直式算則，也可以正確使用算則計算乘法問題。文本分析和問卷調查結果發現，使用幾個百幾個十幾個一的幾倍的多步驟計算方式，需要兩種形式的位值概念轉換以及一種等價關係的轉換，對學童的學習負荷量大。

研究者建議，我們應以「幾千」的位值概念轉換做為學童理解乘法直式算則概念過程的主軸，不要以需做「幾千」和「幾個千」兩種形式的位值概念轉換和一種等價關係的轉換方式理解直式算則，以免造成學童的學習負荷。同時，為了減低學童解題過程中的計算程序性知識的負荷，五年級的學童應該、也可以理解乘、除直式算則。也就是說，「能嘗試理解乘、除直式算則」應該提前明列於九年一貫課程第二階段或者不列入能力指標。

關鍵詞：乘法直式算則，位值概念，學習負荷

一、前言

時至 2001 年秋季，國民中小學九年一貫課程「暫行綱要」已經發布，國民小學一年級也已開始實施九年一貫課程；然而，將九年一貫課程與八二年課程標準做一比較，發現現在的數學學習領域學習節數比以前減少每週一到二節。九年一貫課程實施要點中，明訂各年級學習總節數從 22-24 節到 35-37 節不等，各領域學習節數從 20 節到 30 節不等，以及從 2-4 節到 5-7 節不等的彈性學習節數。在 20 節到 30 節不等的領域學習節數中，語文學習領域可佔 20%-30%，其他六個學習領域各佔 10%-15%。計算數學學習領域每週的學習節數與八二年數學學習節數如表一，發現國民小學五、六年級的學習節數每週減少將近二節，三、四年級也減少將近一節。

表一 九年一貫與八二年版數學學習領域每週學習節數一覽表

年級	一	二	三	四	五	六	七	八	九
九年一貫	2~3	2~3	2.5~3.75	2.5~3.75	2.7~4.05	2.7~4.05	2.8~4.2	2.8~4.2	3~4.5
彈性節數	2~4	2~4	3~6	3~6	3~6	3~6	4~6	4~6	5~7
八二年	3	3	4	4	6	6	3	4	2+(2)

除了教學時數減少之外，有些九年一貫數學學習領域能力指標的編訂並沒有做過實徵性的研究，因此，我們有必要檢視這些能力指標的編排是否恰當，以便對各個概念的學習做適當的安排。其中，在六、七年級的第三階段能力指標 N-3-2 明列「能嘗試理解乘、除直式算則」；相較於八二年版的數學課程標準，它沒有明列在任何年級。因此現行八二年版的數學課程可以將乘、除直式算則編訂於各個年級的相關單元，如表二。但是我們仔細分析現行八二年版國立編譯館主編的數學教科書(簡稱國編本)，發現全數乘法直式算則在國小六年內都沒有正式呈現。很顯然的，在乘法直式算則方面，九年一貫能力指標和國編本的呈現時程是一致的。

表二 九年一貫課程綱要與八二年課程標準有關乘除概念的學習時機

九年一貫暫行課程綱要		八十二年課程標準	
N-1-4	能透過累加活動連接倍的語言，理解乘法的意義並解決生活中簡單(積 ≤ 100)的整數倍問題(例如：單位數 ≤ 12 ，單位量 ≤ 15)。	二年級	二到九的基本乘法 查乘法表寫出計算結果 兩步驟的加、減、乘問題 除法的預備經驗。
N-2-1	能延伸非負整數的認識到十萬並認識位值概念，進而理解 0 代表空位的意義。	三年級	0 和一的乘法 三位數乘以一位數 除法的意義 基本除法
N-2-2	延伸加、減、乘、除 與情境的意義，使能適用來解決更多的生活情境問題，並能用計算器械處理大數的計算。	四年級	兩步驟的四則問題。 三位數乘以二位數 除數是一位數的除法 除數是二位數的除法 簡易的整數四則運算。
N-2-3	能理解加、減的直式算則。		估商活動(除數為二位數)
N-3-2	能嘗試理解乘、除的直式算則。		

再者，最近幾年當中，一些家長、教師和數學教授們對於八二年版數學課程教學的反對聲浪一波接著一波接踵而來。仔細觀察他們對數學課程的批判，發現他們所舉的例子有些是針對乘除運算過程所做的質疑與批判。例如林貴榮(陳香蘭, 2001)舉的例子：現在的學童學習「 $8 \times 7 = 56$ 」，必需要用「 $8 + 8 = 16, 16 + 8 = 24 \dots$ 」的方式計算。國小教師郭寶鶯(2001)說學童在計算「 $195 \div 8$ 」時，必需要這樣算：「 $8 \times 10 = 80, 8 \times 20 = 160 \dots 8 \times 24 = 192, 195 - 192 = 3$ 」。數學

系教授滕楚蓮(2001)也舉「 378×265 」的例子，說明學童要先算「 5×8 ， 5×70 ...，再將九個數加來」。他們認為現在的數學課程讓簡潔的計算變得太繁瑣了。

基於教學時數減少的考量，以及家長、教師和數學教授們對乘、除法計算的疑慮，研究者將從學童解全數乘法問題的程序性知識學習負荷，以及在八二年版架構下學童學習全數乘法直式算則理解程度的角度，探究能力指標 N-3-2「能嘗試理解乘、除直式算則」的編訂是否恰當，進而提出未來編訂九年一貫數學課程中乘、除直式算則的建議。

研究者考量文章篇幅的限制，本文只報導有關全數乘法算則的相關問題。至於除法問題，以及小數的乘、除直式算則，有必要時將另行撰文探討之。

二、研究目的

本文的研究目的在檢視九年一貫數學學習領域能力指標 N-3-2「能嘗試理解乘、除直式算則」的編排是否恰當。也就是說，研究者將探究現行八二年版架構下，使用國編本數學教科書的五年級學童解全數乘法問題時的程序性知識學習負荷，以及他們對全數乘法直式算則的理解程度，進而提出九年一貫數學課程中學習乘法直式算則的建議。

研究者從學童學習負荷以及理解程度探討本問題，主要的觀點是現今的數學教學和課程均強調以學童為中心，而非強調以數學結構為取向，所以能力指標的編排應以學童是否能理解，是否能負荷為依歸。

三、文獻探討

有關全數乘法直式算則的文獻，研究者從 ERIC(Educational Resources Information Center) 搜尋，發現在國外相關的研究不多。Brown(1975)和 Broadbent(1987)分別在 Arithmetic Teacher 的期刊上描述一種基於完全平方所發展的乘法運算方法以及 lattice 的乘法運算方法。Spickerman(1971)和 Sgroi(1998)描述以折半和加倍為基礎的乘法運算方法 Russian Peasant multiplication。Albany(1972)討論累加、矩陣、分配律、Egyptian and Russian Peasant multiplication, Gelosia, Napier's Rods and Genaille's Rods 等各種乘法運算的差異。Baek(1998)觀察 3 到 5 年級六個班的學童，當他們尚未學過乘法直式算則時解答有關乘法問題的解題表現，發現學童會利用籌碼、積木、或者畫圖的方式直式模擬(Direct modeling)，不將數字分解而做累加的完整數策略(Complete number strategies)，將數字分解(例如 $177+177=200+140+4$)的分割數策略(Partitioning number strategies)，或者依特定的問題將數字重組(例如 250 乘以 5 時，先將 250 變成 125 再乘以 10)的補償策略(Compensating strategy)計算乘法問題。

在國內有關乘法直式算則的文章，82 年國小數學課程標準編輯小組(簡稱編輯小組，蔣治邦，謝堅，陳竹村，吳淑娟和林昭珍，2000)認為學童對問題的理解方式以及解題策略，都會受到學童運思方式的制約。編輯小組並將學童的運思階段分為四個階段，分述如下：

第一階段：序列性合成運思期。學童將數個「1」合而為一，形成一個集聚單位的集合體，例如將 10 個「1」合成 10。

第二階段：累進性合成運思期。學童可以以一個集聚單位(例如 10)為起點，繼續合成新的「1」，而形成新的集聚單位，例如以 10 為起點繼續合成 3 個「1」，而形成新的集聚單位 13。亦即在這個階段的學童可以利用往上累加的方式開始學習乘法。

第三階段：部份—全體運思期。學童能掌握「1」與「1」為元素所合成的集聚單位(例如10)間的部份—全體關係，同時能明顯區分兩者的意義，因此在混合使用兩種以上的被計數單位，也不混淆其意義。例如，學童可以先使用數詞序列點數有幾個「1」，再使用相同的數詞序列點數有幾個「拾」，而不會混淆的唸出數詞是幾個「1」或幾個「拾」。同時學童也可以將數個集聚單位和數個「1」單位合而為一，形成新的集聚單位，例如能將「33」視為3個「拾」與3個「1」的合成結果。

第四階段：測量運思期。此階段的學童能以掌握「1」和集聚單位(例如10)間的部份—全體關係為基礎，進而能掌握集聚單位(例如「拾」)與以其為元素所合成的另一個集聚單位(例如10個「拾」)間的部份—全體關係，故而學童可以同時掌握兩個層級的部份—全體關係。

陳竹村(1996)暢談八二年數學課程四則運算的理念，闡述學童的運思階段，並提及學童對於乘數是二位數的解題策略可以分為連續地又一倍的策略，連續地又十倍及又一倍的策略，幾十倍加幾倍合起來的策略，半乘法算則策略，乘法算則策略等五種策略。文章中也提及「成人乘法算則」難以理解的是「2個十的5個百倍」是什麼意思？基於這個理由，八二年實驗教材在國小階段不引入與發展乘法算則。同時以「2個十的500倍」與「2個千的5倍」等價的方式，希望學童能看得懂「成人乘法運則」。

研究者也對國內外相關教材做一探討，發現國內六四年版處理乘法的方式(陳竹村，1996)如下：小華的哥哥每月儲蓄134元，兩個月共儲蓄幾元？是用1張百元鈔票、3個十元硬幣及4個一元硬幣代表幾百整、幾十整及幾的倍數，再把它加起來。然後用直式記錄解過程。最後再用定位板說明直式記中算則的規則、方法及步驟。如圖一。

$\begin{array}{r} 100 \times 2 = \\ \times 2 \\ \hline 200 \end{array}$	$\begin{array}{r} 30 \times 2 = \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \times 2 = \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ \times 2 \\ \hline 8 \\ 60 \\ \hline 268 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ \times 2 \\ \hline 68 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ \times 2 \\ \hline 268 \end{array}$
---	---	---	--	--	---	--

圖一 六四年版處理乘法算則的方式

在國外，Addison-Wesley(1995)和 ScottForesman(1994)兩種數學教科書處理乘法直式的方式大致相同。他們在四年級時，利用積木介紹 24×3 的直式乘法。4個一 $\times 3=12$ 個一，12個一 $=1$ 個十2個一，2個十 $\times 3=6$ 個十，6個十加1個十 $=7$ 個十(p. 258)。 50×70 則運用交換律和結合律得出結果： $50 \times 70=5 \times 10 \times 7 \times 10=35 \times 100=3500$ (p. 274)，或者利用4個十乘以2個十 $=8$ 個百，理解 40×20 就先算 4×2 再乘以100(p. 178)。 24×40 的直式乘法是利用 24×4 個十 $=96$ 個十，讓學童理解結果是960。介紹 28×24 直式乘法時，先乘以個位的4，再乘以20(p. 184)，如圖二。三位乘以二位的處理方式也相同。

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 4 \text{ tens} \\ \hline 96 \text{ tens} \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ \times 40 \\ \hline 960 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 28 \\ \times 24 \\ \hline 112 \\ 560 \\ \hline 672 \end{array}$
--	--	---

圖二 二位數乘以兩位數的直式乘法

雖然我們在 Addison-Wesley(1995)和 ScottForesman(1994)兩種數學教科書中沒有看到乘法直式算則的出現，但是在五年級教師手冊明列為基礎的補充教材 - 實作(practice, skills maintenance)中，卻出現直式算則的算法(p. 124B)，他們的處理方式似乎是直接省略圖二中 560 的 0。

從國外教科書處理乘法直式算則的時程來看，似乎蠻符合八二年的時程，也就是說在六年級之前不出現乘法直式算則。但是引入乘法直式的方式似乎沒有使用類似「2 個十的 5 個百倍」的語言。因此，我們有必要探討國編本介紹的乘法直式算法，對學童的學習是否造成負荷，以及學童對乘法直式算則的理解程度。

四、研究方法綜述

研究方法主要採本文分析，以及問卷調查。在理解學童解乘法問題的程序性知識學習負方面，除了對現行國編本進行文本分析，理解學童學習歷程之外，還針對一直以國編本為教科用書的台北市國小五年級上學期三班 102 位學童進行問卷調查，理解學童解乘法問題的程序性知識學習負荷。學童對乘法直式算則的理解方面，則主要以問卷調查方式進行。

研究者之所以以國編本的教科書為文本分析對象，主要是因為有些修訂八二年版數學課程標準的委員參與國編本教科書的編著，所以國編本教科書最能詮釋八二年課程標準的精神。研究者之所以對一直使用國編本教科書的五年級學童實問卷調查，主要是因為他們最能詮釋在八二年版架構下的學習情況。同時九年一貫能力指標和國編本的呈現時程相當一致，正好可以讓我們理解九年一貫能力指標 N-3-2 列在第三階段的適當性。在文本分析的信度和效度方面，研究者同時參酌教科書、教學指引和相關的教材分析書籍進行三角校正。

在學童的取樣方面，由於所有使用國編本做為教材的學校資訊不容易收集，同時研究者限於時間、人力和物力無法對這些學校進行有系統的抽樣調查，探究有代表性的學童的學習負荷。因此只找一所位於台北市招收社區學童且以常態編班進行教學的學校進行問卷調查。但是研究者在本文中，將在最後一節針對學童的學習負荷進行合理的推論，以彌補這方面的缺點。

研究者所調查的問卷共分三大題。第一大題選擇題，除了探究有關位值概念、與位值概念相關的加法和乘法問題之外，還加入國編本教科書所呈現的個十、幾個一的幾倍乘法問題，以及乘法直式算則計算過程中的位值相關概念。所謂位值概念，例如，3572 的 3 代表 3 個千的「幾個千」的位值概念或者代表 3000 的「幾千」的位值概念，它們雖然都是位值概念但形式不同。位值概念的加法和乘法，例如， $700+800$ ，5 個百加 6 個百， 20×700 ，或者 5 個十乘以 3 個百的加法和乘法。

第二大題計算題，要求學童先用自己喜歡的方法計算全數乘法之後，再用第二種方法計算。研究者意圖藉此大題探究學童喜歡使用的乘法計算方法，理解那一種方法對學童的學習負荷較少，以及探究他們是否已經學會使用國編本所呈現的多步驟方法。所謂的多步驟方法，就是學童在計算問題時，不是用簡潔的直式算則，而是運用分配律的方法，使用幾個十個一的幾倍的方法，使用幾個十乘以幾個十的方法，或者使用乘法表徵但是用累加計算的方法。

在第三大題的設計上，研究者利用國編本教材中一模一樣的問題，要求學童使用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的多步驟方法計算問題，藉此探究學童是否學會此一計算方法。

由於本問卷含蓋所有學童乘法直式算則相關概念，因此有內容效度。學童的調查結果亦經 SPSS 的 Cronbach' α 信度考驗，值為 0.5241，在合理的信度範圍內。

II、研究假設

本研究沒有意圖訪談國編本編著者，理解他們設計教材背後的理念，主要的假設是編著者在編著教材過程中已將他們的理念呈現在教材之中。例如，教材中有多種不同解法的呈現，即顯示編著者著重學童多元解法的理念。同時，這些解法理應是大多數學童會出現的解法，或者是編著者意圖學童學會的方法。研究者有此假設，是因為一般教師無法或者沒有太多的時間和編著者接觸理解其背後設計的理念，只能從教材分析中理解編著者的理念。此外，研究者也參酌編著者所發表的相關教材分析書籍和教學指引，因此研究者相信可以正確詮釋編著者的理念。

國際教育成就學會 (IEA; The International Association for Educational Achievement) 在其對國際數學課程的研究裡提到三種課程：意圖的(intended)課程、實施的(implemented)課程、獲得的(attained)課程(Travers & Westbury, 1989)。雖然研究者只對意圖課程(教材)和獲得課程(學童的學習成果)進行分析和調查，沒有對教學者(實施課程)進行訪談。但是研究者曾訪談兩位不同班的受測學童，發現老師會照著國編版的處理方式進行教學。同時，從學童的問卷調查發現有部份學童可以用國編版所提的策略解答乘法問題(第三大題更有一半以上的學童可以依要求的方式作答；參見第七節內容)，因此研究者假設教學者(實施課程)已在教學過程中反應意圖課程，所以不再訪談教學者相關問題。

有關學童的學習負荷方面，研究者以相對論的概念處理，也就是說，研究者比對學童使用兩種解題策略進行解題，那一種解題策略學童較不喜歡用，且答對率偏低(參見第七節內容)，此時研究者即判定這種策略對學童的學習負荷大。

III、國編本處理乘法計算問題的文本分析

文本分析發現，82 年版國編本數學教科用書以單位量轉換的觀點處理全數乘法計算的程序性知識，同時在考量學童運思階段之後，三年級以前的處理方式主要以累加來解乘法問題，四年級之後則以幾個百幾個十幾個一的幾倍解答乘法問題。現在分述如下：

(一)、以單位量轉換的觀點處理整數乘法

82 年版國編本國小數學教科用書和 64 年版部編本國小數學教科用書處理全數乘法問題的觀點不同。82 年版國編本編輯小組(蔣治邦等人, 2000)的觀察發現，64 年數學課本是透過「連加」的方式引入乘法算式，並將乘法視為加法的速算。編輯小組同時發現「一個數連加非整數次」是無意義的，因此當乘數是分數或小數時，64 年課程改用倍的語言引入乘法。編輯小組認為乘數是全數和小數或分數引入乘法概念的方式不同，讓學童感覺到乘號有不同意義，容易造成學童混淆數學符號的意義。為了幫助學童擴展數學符號的意義，編輯小組發現「單位量轉換」的觀點不僅同時適用於乘數是全數和小數或分數的問題，同時除法問題也可以看成「單位量轉換」的問題。以「3 個蘋果裝一盒，4 盒共有幾個蘋果？」為例，3 個蘋果

裝一盒是單位量，4 盒是單位數，現在要以「1 個蘋果」為單位量重新描述總量，問共有幾個蘋果。由於學童都可以利用「單位量轉換」的觀點學習所有乘除法概念，所以編輯小組改用「單位量轉換」的觀點處理全數乘法問題。同時，這種編輯小組處理「單位量轉換」的觀點時，一直使用「倍」的語言。編輯小組期待這個「倍」的語言能夠順利把全數乘法擴展到小數和分數的乘法。

(二)、三年級以前幾乎都是運用累加處理乘法問題

編輯小組(蔣治邦等人, 2000)預期二年級的學童已處於累進性合成運思期，學童可以以一個集聚單位為起點，重複製作下一個集聚單位，亦即學童可以用「又一倍」(又一個聚集單位)的累加策略解決倍的問題。因此第三冊開始引入乘法概念的問題時，便使用具體表徵或者連加的方式計算乘法概念的問題。例如，第三冊 13 頁第三單元「4 隻青蛙有幾條腿？」的問題，如圖三左方所示，教材上呈現的方式就用畫「圓圈」和寫橫式「 $4+4=8$ $8+4=12$ $12\dots$ 」的方式計算問題。學童的做法是有 1 個 4，再來 1 個 4 是 8，再來 1 個 4 是 $12\dots$ 的使用累加法當做解題策略。之後，第 14 頁就定義「7 個 4，也可以說成 4 的 7 倍」。同時，國編本在處理簡單二位數乘以一位問題時，也是仍然使用具體表徵或者累加的方式計算問題。例如，第三冊 51 頁第七單元「1 打鉛筆有 12 枝，6 打有幾枝？」的問題，教材上呈現同學在寫橫式「 $12+12=24$ $24+12=36\dots$ 」，畫「方形」，以及「12, 24, 3...」的方式計算問題。這一點和 Baek(1998)所觀察到的學童解題策略雷同。

○○○○	$4+4=8$	1	2	3	4	5	$5+5=10$	$5\times 2=10$
○○○○	$8+4=12$	5	10	15	20	25	$10+5=15$	$5\times 3=15$
○○○○	$12\dots$						$15+5=20$	$5\times 4=\dots$
○○○○							$20+5=25$	
○							$25+5=$	
							$30+5=$	
							$35+5=$	
							$40+5=$	

圖三 乘法概念的啟蒙與一位數乘以二位數的處理方式

編輯小組在第四冊使用倍的語言介紹乘號。在第四冊 5 頁第二單元「5 的 11 倍是 55，寫做 $5\times 11=55$ 」。同時，處理的方式也是利用連加和乘號並行的方式。例如，第 5 頁「一張郵票 5 元，買 11 張需要多少錢？」，如圖三右方所示，就利用連加和乘號並行的方式處理。教材雖然使用乘法算式表徵，但從教材脈絡可以發現，合理的運算方式是使用累加解答問題。

編輯小組(蔣治邦等人, 2000)預期待三、四年級的學童數概念的發展已經從累進性合成運思期進入部份一全體運思期。此時學童能明顯區分「1」和集聚單位(例如 5)的計數意義，同時也可以用「又幾倍」或「又十倍」的活動來簡化乘法問題的計算。例如，10 個 5 是 50，再來 10 個 5 是 100，再來 10 個 5 是 150。但是國編本在處理二位數乘以二位數問題時，雖然沒

Lee, Y.S. 乘法直式算則

有明白說明用那一種方法計算，從圖示仍然看得出來是利用「又一倍」的累加方式處理。例如，第五冊 32 頁第五單元出現「1 箱裝 15 顆蘋果，11 箱可以裝幾顆？」的圖示「1 箱裝 15 顆，2 箱就有...」，以及「1 箱裝 15 顆，2 箱就是 15 顆再加...」。這樣的處理方式或許是考慮到學童剛從累進運思期進入部份—全體運思期，所以仍然以「又一倍」的方式處理。

至於在二位數乘以一位數或二位數問題的複習(或加廣)上，國編本也是利用連加和橫式乘法的方式處理問題，但在做法上已多了運用「又幾倍」或「又十倍」的方式加速問題的計算。例如，第五冊 42 頁處理二位數乘以二位數時，除了用「 $18 \times 2 = 36$ $18 \times 3 = 54$ $18 \times 4 = 72$ $18 \times 5 = 90$ $18 \times 6 = 108$ $18 \times 7 = 12...$ 」**「又一倍」**的橫式乘法處理之外，也出現了「 $18 \times 10 = 180$ $18 \times 11 = ...$ 」的**「又十倍」**，再往上加 18 的計算方式。對於此類問題，由於學童還沒有背過基本乘法事實，所以學童雖然把問題寫成乘法，但他實際上仍使用累加的方式計算。編輯小組在問題的處理上，有意讓學童持續一段很長的時間**利用加法計算問題，再用乘法算式表徵計算結果**。按照編輯小組的說法：「必須要求學童使用，學童才會掌握其意義」(蔣治邦等人，2000，p23)。

$248 + 200 = 448$	$200 + 200 = 400$
$448 + 40 = 488$	$48 + 48 = 96$
$488 + 8 = 496$	$400 + 96 = 496$
...	...

圖四 三位數乘以一位數的處理方式

在三位數乘以一位數的問題上，國編本也是運用了累加的方式，只不夠因為數值較大，學童無法直接算出答案，所以國編本就把數字拆解再相加，先加百位，再加十位和個位。例如，第五冊 51 頁第七單元處理「一盒有 248 顆糖果，3 盒有多少顆？」的問題上，如圖四所示，就是運用了 Baek(1998)觀察到學童所使用的分割數策略。

10 的乘法表第一次出現在第五冊 85 頁第十一單元。也就是說，此時學童才開始試圖使用與熟記乘法表。國編本之所以將以前的九九乘法表，換置成 10 的乘法表，主要的用意是期望學童在理解乘法算則之前，能發展 10 的乘法以加快計算速度。例如，在計算 $15 \times 7 = ()$ 時，學童可以將 15 看成 10 和 5，而進行 $10 \times 7 = 70$ ， $5 \times 7 = 35$ ， $15 \times 7 = 105$ 的計算方式。

國編本也考量到「十的幾倍」和「0 的乘法」的問題，做為學童學習乘法直式算則的必要過程。例如，第六冊 30 頁第四單元處理「十的幾倍」的問題，意圖讓學童可以理解「21 個 10 是 210」。31 頁利用「1 個空魚缸有 0 條魚。56 個空魚缸合起來有多少條魚？」讓學童理解「0 的乘法」問題。

$42 + 42 = 84$	$42 + 42 = 84$	$200 + 200 = 400$	$249 + 200 = 449$
$84 + 40 = 124$	$84 + 80 = 164$	$40 + 40 = 80$	$449 + 40 = 489$
$124 + 2 = 126$	$164 + 4 = 168$	$9 + 9 = 18$	$489 + 9 = 498$
$126 + 40 = 166$	$168 + 80 = 248...$	$400 + 80 = 480$	$498 + 200 = 698$
		$480 + 18 = 498$	$698 + 40 = ...$
		$498 + 200 = ...$	

圖五 複習二位數或三位數乘以一位數

雖然教材上已經出現 10 的乘法表，國編本在複習(或加廣)二位數或三位數乘以一位數的問題上，仍然運用加法來處理。例如，第六冊 37 頁第四單元處理「遊覽車每輛可坐 42 人，7 輛可坐多少人？」，38 頁處理處理「積木每盒特價 249 元，老師買了 6 盒，共需多少元？」的問題時，如圖五所示，都是運用累加的方式處理。編輯小組之所以有這樣的處理方式，按照教學指引(2001)教學活動示例的說明是「此活動若用有乘號的算式記錄解題過程，對學生而言較為困難，所以不要求學生直接用有乘號的算式記錄解題過程」。「若學生出現乘號的解記錄，教師宜追問 $249 \times 2 \dots 249 \times 6$ 等式子中的答案是怎麼知道的(p135, p137)」。研究者依據教材脈絡分析認為編輯小組應該是考量到學童尚未熟記 10 的乘法表，或者考量到學童還無法理解可以把二位數拆解成兩個集聚單位(十位和個位)，再利用分配律來解答問題，所以仍然以累加的方式處理，因此即使學童使用乘號記錄解題過程，教師也應追問乘號的答案是怎麼知道的。

(三)、四年級以後運用幾個百幾個十幾個一的幾倍處理乘法問題

由於部份一全體運思期的學童可以區辨不同的被計數單位(蔣治邦等人，2000)，也就是說四年級學童理解 1 個「千」是一千個「1」的位值概念，所以國編本在第七冊 13 頁第二單元才第一次出現「幾個千」的位值概念，出現的方式是利用從個位到萬位的定位板。

編輯小組分析乘數是多位數的問題(蔣治邦等人，2000，p. 26)，例如 $68 \times 37 = ()$ ，以單位的觀點可以分成四大類。第一類是將被乘數與乘數都視為以「1」為計數單位。此時學童的計算方式可能透過又一倍或又幾倍的方式將 68 累加 37 次；將 68 視為 60 和 8 的合成，再透過乘法左分配律 $68 \times 37 = (60+8) \times 37 = 60 \times 37 + 8 \times 37$ 計算；將 37 視為 30 和 7 的合成，再透過乘法右分配律 $68 \times 37 = 68 \times (30+7) = 68 \times 30 + 68 \times 7$ ；或者將 68 視為 60 和 8 的合成，37 視為 30 和 7 的合成，再透過乘法分配律 $68 \times 37 = (60+8) \times (30+7) = 60 \times 30 + 60 \times 7 + 8 \times 30 + 7 \times 8$ 計算。第二類是將 68 視為 6 個十和 8 個一，所以先算出 6 個十的 37 倍是 222 個十，再算出 8 個一的 37 倍是 296 個一，最後再將 222 個十和 296 個一合起來。第三類是將 37 視為 3 個十和 7 個一，所以先算出 68 的 3 個十倍，以及 68 的 7 個一倍，最後合起來。第四類則分別將 68 視為 6 個十和 8 個一，37 視為 3 個十和 7 個一，所以先算出 6 個十的 3 個十倍，6 個十的 7 倍，8 個一的 3 個十倍，8 個一的 7 倍，再合起來。

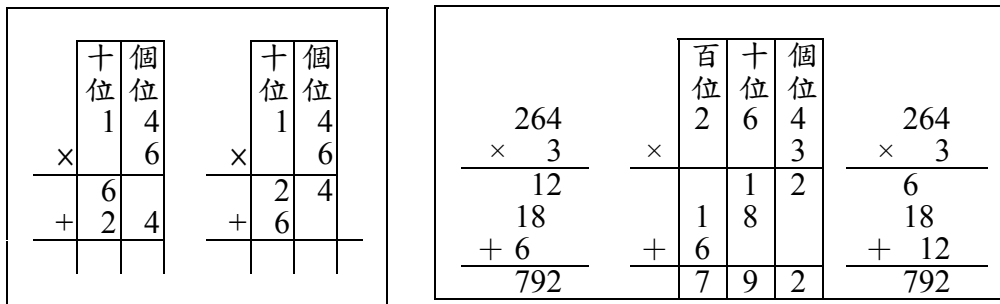
$4+4=8$	$4 \times 3=12$
$8+4=12$	

圖六 幾個十、幾個百和幾個千的乘法問題的理方式

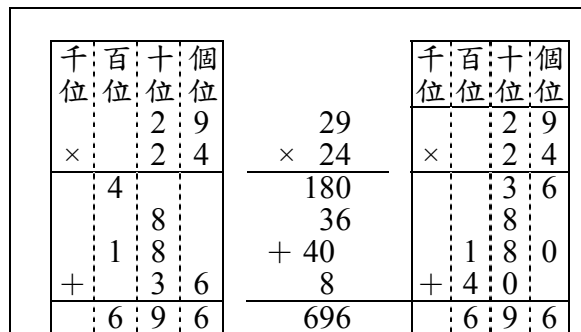
編輯小組(蔣治邦等人，2000)認為學童無法理解第三類「某數的幾個十倍」和第四類中「幾個十的幾個十倍」的意義，所以國編本在學童理解「幾個千」的位值概念之後，才利用第二類的方式處理「幾個十、幾個百和幾個千的乘法」問題。例如，第七冊 38 頁第四單元，學童開始學「買一包花生需付 4 個十元。買 3 包花生，需付多少個十元？」的問題，如圖六所示。至此，教材才出現簡潔的乘法「 $4 \times 3=12$ 」，此時學童已可以熟記乘法基本事實。

國編本乘法直式記錄第一次出現在第七冊，處理方式是利用「幾個十、幾個百和幾個千

的幾倍的乘法」方式。例如，第七冊 112 頁第十二單元出現兩位數乘以一位數，三位數乘以一位數的問題，如圖七所示。對於 14×6 的問題，就是把 14 看成 1 個十和 4 個一，然後再乘以 6 個一，所以得到 6 個十和 24 個一，然後相加得到 84 個一。



圖七 二位數或三位數乘以一位數的直式處理方式



圖八 二位數乘以二位數的直式處理方式

對於二位數乘以二位數的直式乘法，國編本也運用了「幾個十、幾個百和幾個千的幾倍」的乘法。例如，第八冊 12 頁第二單元處理 29×24 的方式，如圖八所示中間和右邊的計算方式就是第二類的處理方式，其中 180 是由 9 個一的 20 倍，40 是由 2 個十的 20 倍計算而來(教學指引，2000，p.66)。研究者發現，在同一個式子當中，被乘數和乘數的 2，學童必須做「幾千」和「幾個千」兩種位值形式的轉換，把被乘數的 2 看成 2 個十，乘數的 2 看成 20，然後再相乘。

編輯小組在第七冊意圖透過「幾個 1 的幾十倍」與「幾個拾的幾倍」的等價關係，讓學童把「幾個 1 的幾十倍」的問題轉化為「幾個拾的幾倍」的問題。例如，2 個一的 50 倍和 2 個十的 5 倍誰大，協助學童察覺其等價關係。因此圖八左邊的計算方式，(第一個計算結果)4 個百是由 2 個十的 20 倍是 2 個百的 2 倍，(第三個計算結果)18 個十是由 9 個一的 20 倍是 9 個十的 2 倍(教學指引，2000，p.66)。研究者發現，在同一個式子當中，被乘數和乘數的 2，學童必須做「幾千」和「幾個千」兩種位值形式的轉換，把被乘數的 2 看成 2 個十，乘數的 2 看成 20，然後再利用一種等價關係，把 9 個一的 20 倍轉換成 9 個十的 2 倍，再相乘。

儘管國編本在第七、八冊出現乘法的直式計算方式，編輯小組在複習(或加廣)二位數乘以一位數、一位數乘以二位數、和二位數乘以二位數的問題上，有時仍然沿用橫式乘法的方式處理問題。例如，第九冊 43-44 頁第四單元， $18 \times 24 = ()$ 的處理方式，如圖九所示。圖中左邊和右邊的處理方式，對 10 的乘法事實還不熟的學童，在計算時或許可以馬上求出 $18 \times 10 = 180$ ，甚至馬上求出 $18 \times 20 = 360$ ，學童接下來在計算 18×21 時，是用什麼方法算出來的？

以此算式的表徵方式，研究者相信編輯小組的用意是要學童使用累加的方式計算出來。圖中中間的算式處理方式， $18 \times 2 = 36$ ， $18 \times 4 = 72$ ，研究者相信編輯小組的用意也是要學童使用累加的方式計算出來，只不過可以用「又幾倍」的方法。研究者反思，編輯小組的用意是要在教科書中呈現多元的解題策略，但是解題策略無法全部羅列，所以所羅列的解題策略，應該是最多學童所呈現的策略，或者是編輯小組希望學童使用的策略(相信一般教師也會這樣的解讀)。結果我們的五年級學童還是利用「又幾倍」的方式累加“好幾次”，研究者感受到我們的學童對於乘法程序性知識的學習荷負蠻重的。

$18 \times 10 = 360$	$18 \times 10 = 180$	$10 \times 10 = 100$	$8 \times 10 = 80$
$18 \times 20 = 360$	$18 \times 20 = 360$	$10 \times 20 = 200$	$8 \times 20 = 160$
$18 \times 21 = 378$	$18 \times 2 = 36$	$10 \times 21 = 210$	$8 \times 21 = 168$
$18 \times 22 = 396$	$18 \times 4 = 72$	$10 \times 22 = 220$	$8 \times 22 = 176$
$18 \times 23 = 414$	$360 + 72 = 432$	$10 \times 23 = 230$	$8 \times 23 = 184$
$18 \times 24 = 432$		$10 \times 24 = 240$	$8 \times 24 = 192$
			$240 + 192 = 432$

圖九 複習或加廣二位數乘以二位數的處理方式

$6 \times 100 = 600$	$600 \times 2 = 1200$
$6 \times 200 = 1200$	$600 \times 3 = 1800$
$6 \times 300 = 1800$	$600 \times 4 = 2400$
$6 \times 400 = 2400$	

圖十 幾個十的幾百倍的處理方式

編輯小組在第七冊曾經透過「幾個1的幾十倍」與「幾個拾的幾倍」的等價關係，讓學童把「幾個1的幾十倍」的問題轉化為「幾個拾的幾倍」的問題。在第九冊有一部份的問題也是處理這樣的等價轉換過程。例如，第九冊77頁第七單元「一個小圓杯可以裝6個十元，有400個同樣大小的小圓杯，共可裝多少個十元？」的問題，如圖十所示，左邊的算法就是利用「幾個十的幾倍」。至於右邊的處理方式，學童是利用等價關係的處理問題，將6個十的400倍看成與600個十的4倍相同。

國編本在第九冊77-78頁第七單元處理小單位換成大單位的問題。例如「10個百可以換成1個千，3500個百可以換成幾個千？」。這是國編本認為學童在處理乘法算式問題過程中的必要的轉換動作。

編輯小組在引導學童理解乘法算則的路上，多次利用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法，甚至要求學童“學會”這個方法。例如，第九冊81頁第七單元處理「『7個百、5個十、4個一』的400倍，合起來是幾個百、幾個十、幾個一？注意：要用『幾個百幾個十幾個一的幾倍』的方法。」然後再問「『2800個百、2000個十、1600個一』合起來，可以換成幾個十萬、幾個萬、幾個千、幾個百、幾個十、幾個一？注意：萬、千、百、十、一的個數不能比9多。」後面的例子再度要求學童用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法，以及「萬、千、百、十、一的個數不能比9多」的方法解答問題。按照編輯小組(蔣治邦，2000，p92)的想法，限制兒童的計算策略是為了協助學童將乘法的解題策略，逐漸走向乘法算則。但是研

究者發現，這種處理方式仍然沒有解決「幾個百幾個十幾個一的幾個十倍」的問題，只是要求學童“一元化”的學習，似乎有違編輯小組強調建構知識的理念。

國編本隨後也將「幾個十幾個一的幾倍」的計算方式寫成直式。例如第九冊 101 頁第九單元，處理「 29×314 」的問題，如圖十一所示，便要求學童用「幾個十幾個一的幾倍」的方法算算看，並且用直式記定位板記錄。學童把 29 拆成 2 個十和 9 個一，然後算 2 個十的 300 倍，2 個十的 10 倍，2 個十的 9 倍...。按照國編版的處理方式，學童在同一個位值上的數需要做兩種不同形式的位值概念轉換動作以及一個等價關係的轉換。學童要把被乘數的 2 看成 2 個十；把乘數的 3 看成 300，再把 2 個十乘以 300 看成和 200 個十乘以 3 等價，然後再相乘，再相加¹。研究者在剖析此一計算方式，發現自己的負荷蠻重的。因此研究者也相信學童在乘法直式算式的程序性知識的學習上負荷蠻重的。

千位	百位	十位	個位
		2	9
x	3	1	4
6	0	0	
	2	0	
		8	
2	7	0	0
		9	0
		3	6
9	1	0	6

圖十一 利用幾個十幾個一的幾倍進行直式乘法的處理方式

小英				小童			
	百位	十位	個位		百位	十位	個位
x		2	9	x		2	9
		3	0			3	0
	2	7	0		8	7	0
	6	0					
	8	7	0				

	萬位	千位	百位	十位	個位
x				5	7
			3	1	2
			1	1	4
			5	7	0
1	7	1	0	0	
1	7	7	8	4	

圖十二 二位數乘以二位數的乘法直式運算

國編本在第十冊二位數乘以二位數的複習(或加廣)上，也是利用「幾個十幾個一的幾倍」，來讓學童理解乘法的直式運算，只不過和第九冊不同的處理方式是，第九冊的算法是從左邊先算，第十冊是從右邊先算。例如，第 37 頁提問「 $29 \times 30 = ()$ ，括號裡要填多少？」，

¹ 蔣治邦等人(2000)認為學童必須先將被乘數視為多單位合成，分別計算各單位的倍數之後，再整合最後的結果。由於學童解讀乘數觀點上的差異，學童可能使用下列四種策略：甲. 乘數用連續地累又百倍、又十倍以及又一倍策略。乙. 乘數分成幾百倍、幾十倍和幾倍的策略。丙. 乘數分成幾百倍、幾十倍和幾倍的策略，但是利用低階單位的幾(十)百倍與高階單位的幾倍等價關係，進行幾百倍、幾十倍的單位轉換。丁. 乘法算則：把被乘數和乘數都看成混用多階單位來描述數。由於乘法算則需要學童發展到測量運思期才能掌握數概念的乘法結構，因此五年級的學童是以甲策略逐漸發展乙、丙策略。

就是要求學童利用幾個十幾個一的幾倍的方法用直式記下來。如圖十二左邊所示之後，教科書再提問「小英的記法是從哪裏先算的？」，「小童的記法是從哪裏先算的？」，「這兩種記法都是從右邊開始做的」。下一頁便有四個計算題「 $38 \times 56 = ()$ 」， $23 \times 400 = ()$ 」， $57 \times 312 = ()$ 」， $84 \times 506 = ()$ 」要求學童從右邊開始做，並用直式記下來。按照國編本的處理脈絡，童學在計算 57×312 時，也是利用同樣的方式，「先算 57 的 2 倍是 114，57 的 10 倍是 570，57 的 300 倍是 17100，然後加起來是 17784」。如圖十二右邊所示，國編本教科書雖然把步驟數簡化了，但是學童還是要利用兩種形式的位值概念轉換和一種等價關係的轉換才能算出來。至此，學童還是沒學會直式算則（第十冊之後的教材也沒有出現乘法直式算則），學童對於乘法計算的學習負荷還是蠻重的。

七、學童對乘法計算問題相關概念的理解

本節旨在理解學童對問卷三大問題的答題情形，藉此探究學童學習乘法計算問題的學習負荷，以及乘法算則的理解程度。問卷及各題答對率，參見附件一。

問卷調查第一大題的答案選項可以超過一個，但是從學童對前四題，有關位值概念及位值概念的加法和乘法問題分析發現，學童選擇前面正確答案的答對率幾乎比後面正確答案的答對率高出一成，所以研究者合理的猜測是，某些學童沒有留意或者不習慣回答答案超過一個的問題。

(一)、學童理解位值概念以及位值概念的加法和乘法

從第一大題的前五小題答題分析(參見附件一)發現，學童對於兩種形式的位值概念(3572 的 3 代表 3 個千的「幾個千」的位值概念和 3000 的「幾千」的位值概念)，位值相關概念的加法($700+800$ ，以及 5 個百加 6 個百)和乘法(20×700 -- 「幾千」的乘法，以及 5 個十乘以 3 個百 -- 「幾個千」的乘法)都非常清楚，答對率至少八成以上。五年級學童在這方面，已經達到九年一貫數學學習領域所期望學童能學會的標準。

(二)、學童比較習慣利用 20×700 計算問題而非 5 個十乘以 3 個百計算問題

國編本認為學童無法理解「某數的幾個十倍」和「幾個十的幾個十倍」，因此我們改用國外教科書曾經呈現的“幾個十乘以幾個百”的問題探究學童有關位值概念乘法的理解。從第一大題第 3 和 5 小題的答題分析，發現學童對於 $20 \times 700 = 14000$ 的答對率(前面選項)有 87.3%，後面選項 14 個千的答對率則降到 72.5%。5 個十乘以 3 個百等於 15 個千的答對率(前面選項)是 66.7%，後面選項 15000 的答對率反而上升到 81.4%，反而比前面選項的答案高出 15% 左右，代表有部份的學童需要把 5 個十乘以 3 個百的問題轉換成 50×300 來運算。這個意思是說，即使我們把「幾個十的幾個十倍」的問題換成「幾個十乘以幾個十」的問題，學童還是比較習慣利用 20×700 計算問題，而非利用 5 個十乘以 3 個百計算問題。事實上，研究者在批改答案時，也發現有些學童在問題旁邊把 5 個十乘以 3 個百寫成 50×300 ，顯示有些學童在計算 5 個十乘以 3 個百的問題上需要轉換成 50×300 再進行運算。

(三)、學童對於幾個十幾個一的幾倍直式乘法問題中的位值概念容易混淆

從第一大題第 6 小題的答題分析，發現有八、九成的學童可以認知幾個十幾個一的幾倍直式乘法計算過程中的 20 實際上是 20 個十或 200 的意思。但是只有 64.7% 的學童可以認知 20 是由 2 的 10 個十乘以 2 的 10 而來。同時，也有 37.3% 的學童認為是由 20×1 得來，有 23.5% 的學童認為是由 1×20 得來。從選項的答題情形，可以發現學童對於幾個十幾個一的幾倍直式乘法問題中的相關概念比較混淆。

(四)、學童可以理解乘法直式算則中的位值相關概念

研究者反思我們所慣用的乘法直式算則計算方式。在做法上：只要對齊被乘數(或乘數)的位置，例如，計算 143×34 (附件一第一大題第七小題) 時，我們要計算 $4(0) \times 34$ 時(從被乘數開始乘)，只要對準十位，然後 $4 \times 4 = 16$ ，寫 6 進 1， $4 \times 3 = 12$ ， $12 + 1 = 13$ ，寫 13 於 6 的左方，所以 $4(0) \times 34 = 136(0)$ 。再把 3×34 ， $4(0) \times 34$ ， $1(00) \times 34$ 所得的結果相加，就得到我們所要的答案了。研究者發現，我們運用乘法直式算則計算時，並不去考慮它的內涵概念，只是利用對位的方式，然後 $4 \times 4 = 16$ ，寫 6 進 1... 的計算下去。當我們要跟他人解釋為何這樣做時，我們可以以“間接”的方式向他人解釋說，(1)4(3) 在十位代表 40 (或 4 個十)，(3)4 在個位代表 4 (或 4 個一)， $40 \times 4 = 160$ (4 個十 \times 4 個一 = 16 個十)，所以 6 放在十位，也就是對齊(1)4(3)的十位...。這樣的“間接”連結方式只需要一種概念的轉換，研究者認為比較不容易造成學童的學習負荷。因此研究者以此種方式檢驗學童是對於此類乘法算則的理解程度，即乘式中的 136 代表的真正數值，以及 136 是由那兩個數相乘而來。

從第一大題第七小題的結果分析，發現有八、九成的學童可以認知乘法直式算則中 (1)4(3) \times 34 的 136 代表 1360 或 136 個十的位值概念，以及運算過程中 136 是由 4×34 而來。這個意思是說，這些學童理解 136 代表 1360 (或 136 個十)，而且是由十位的 4 (40 或 4 個十) 乘以 34 而來，所以 136 的 6 對齊十位。也就是說，學童可以以上述的方式理解乘法直式算則中的位值概念。

(五)、有八、九成的學童能夠正確計算乘法計算問題

從第二大題兩個小題的總答對率看，兩個問題的答對率在八成到九成，顯示學童能夠正確計算二位乘以三位(包含乘數有的百位是 0 的問題)的乘法問題。

(六)、學童較喜歡使用乘法直式算則計算問題，而且答對率比多步驟方法高

雖然國編本到第十冊還沒出現乘法直式算則，我們的調查發現大部份的學童已經學會乘法直式算則。從第二大題兩小題中最喜歡使用的方法來看，發現使用乘法直式算則的學童遠比使用多步驟的學童高，比例將近三比一(分別為 79:21 和 75:26)。若把第二種方法加入，發現使用直式算則的人次與使用多步驟的人次比將近一比一(91:86 和 91:89)。顯示，若可以讓學童選擇計算方式，學童仍以使用乘法直式算則優先。

再從乘法直式算則與多步驟方法的答對率來看，二小題的答對率都以直式算則較高。探究其原因，多步驟計算問題的步驟數較多，學童弄錯的地方自然增加。在直式算法方面，除了學童可能加法、乘法和進位錯誤之外，有關對位錯誤的問題，發現學童在多步驟的問題(5人)比直式算則(2人)多出3人。在橫式算法方面，除了學童可能加法、乘法和進位錯誤之外，發現有九位學童無法完整做完多步驟的方法。如圖十三所示。

(1). $46 \times 328 = 15088$

● 最喜歡的方法

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 328 \\ \hline 1968 \\ 1312 \\ \hline 15088 \end{array}$$

● 第二種方法

$$\begin{array}{l} 6 \times 8 = 48 \\ 6 \times 2 = 12 \\ 6 \times 3 = 18 \\ 18 + 1 = 19 \\ \hline 1968 \\ 4 \times 8 = 32 \\ 4 \times 2 = 8 \\ 4 \times 3 = 12 \end{array}$$

圖十三 學童的答題舉例

(七)、學童不習慣使用幾個百幾個十幾個一的幾倍的方法計算問題

第三大題是國編本教材第九冊 82 頁第七單元的問題，要求學童使用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法回答問題。答題分析發現，仍然有四成(41 人)使用直式算則計算。同時此題的答對率比第二大題的答對率從 80.7%~90.6%降到 53.9%，驟降三成左右。若從仍使用直式算則的學童來看，發現答對率從 84.9%~92.3%降到 75.6%，降了一成左右；使用多步驟方法的學童從 77.9%~89.9%降到 43.6%，降了三成以上，顯示使用多步驟方法學童的答對率降幅最大。探討學童答對率下降的原因，它是三位乘以三位的問題，比第二大題的二位乘以三位的問題多了一位，因此使用直式算則的學童在乘法錯誤的比率增加 ($13/184=7.1\% \rightarrow 8/41=19.5\%$)。然而多步驟的計算方法，除了乘法錯的比例增多 ($9/177=5.1\% \rightarrow 14/55=25.5\%$) 之外，對位錯誤以及無法完整做完多步驟的學童也增加了 ($12/177=6.8\% \rightarrow 13/55=23.6\%$)。

八、學童學習乘法直式算則的議題

從國編本數學教科用書文本分析，以及學童的問卷調查結果分析，發現國編本處理乘法算則的方式容易造成學童的學習負荷，同時五年級學童已經理解乘法直式算則。因此，研究者有必要再從各個向度思考學童學習乘法直式算則的相關問題。

(一)、乘法直式算則重不重要

九年一貫數學學習領域課程綱要將「能嘗試理解乘、除直式算則」明列於第三階段的能力指標，足見課程綱要編訂小組成員對乘、除直式算則的理解相當重視。但是，在數學教育上，我們若把學童所要學習數學的知識能分為概念性知識、程序性知識、以及解題性知識 (NAEP, 1988; 林福來, 1994)，研究者相信大部分專家學者都同意，學習的重點應該擺在數學的概念性知識，以及解題性知識。即使是八二年版的編輯小組成員(蔣治邦、陳竹村、陳俊瑜和林淑君, 2001)也認同「數學概念形成和發展的夠好，就等同於建立了面對新問題的解題工具」(p.5)。所以，程序性知識只是我們解題過程中的一小部份而已，它的重要性不若前兩者高。因此，研究者認為乘、除直式算則只是解題過程中的程序性知識而已，它需不需要明列為能力指標是一個可以探究的問題。

(二)、乘法直式算則需不需要學

乘法直式算則的重要性不若概念性知識以及解題性知識高。同時，從文本分析和問卷調查結果發現八二年國編本處理乘法直式算則的方式已經造成學童的學習負荷，也造成學童家長、教師和數學專家的反彈聲浪。因此另一個可以思考的方向是，我們的學童需要學會乘法直式算則嗎？套一句八二年版編輯小組成員所用的話：「...成人算則這種專家所發明的、又經濟又有效率的解策略的傳承是可以理解的，但人類文明和智慧的延續為何又須落於兒童的肩上呢？」(蔣治邦等人, 2001, p5)。

同時，美國 NCTM(1989)所著的學校數學課程和評量標準(Curriculum and evaluation Standards for school mathematics)也認為在科技發達的今天，簡易型計算器和電腦隨手可得，我們可以重新考慮計算的重要性，幾乎所有複雜的計算可以交由計算器和電腦來處理。我們只需要學會利用心算答案，或者讓學童學會估計加、減、乘、除四則計算的答案是否合理就可以了。因此，我們不需要讓學童學習乘法直式算則。

但是反過來說，簡潔的乘法算式也是人類文明的一部份，我們的學童不需要學嗎？不需要傳承嗎？八二年版編輯小組成員(蔣治邦等人, 2001)同意「教育需傳承前人的智慧，使人類文明得以延續(p.5)」。另一方面，假如我們的學童沒有學會乘法直式算則，有一天他手邊剛好沒有計算器而又需要做較複雜且精確的計算時怎麼辦呢？慢慢的用加法加嗎？實際嗎？

不管正、反意見如何，研究者無法在此給與肯定的答案，只能在九年一貫課程要學童“嘗試理解乘、除直式算則”，以及文化傳承的前提下，認為學童還是學會乘法直式算則較好。

(三)、乘法直式算則的概念需不需理解

在學童還是學會乘法直式算則的前提下，文本分析及問卷調查結果卻發現，八二年版國編本處理乘法直式算則的方式，是把直式算則的程序性知識做為概念性知識來學，此時容易造成學童的學習負荷。但是在解答一個乘法問題時，乘法直式算則只是問題的程序性知識，它的重要性不若概念性知識和解題性知識高，同時計算器又隨手可得，那麼另一個可以思考的議題是學童只要會利用算則的程序性知識求出答案，並不需要理解乘法直式算則中的概念

性知識。這或許是一個很好的想法，畢竟古人開始接觸四詩五經時，也是先背誦，沒有先理解詩詞的意義以後，再來背誦。

但是這種論點在強調建構主義的今天，好像是一種諷刺。建構主義強調人們知識的形成是主動建構而產生並非被動的接受。人們的知識並非說明世界的真理而是個人經驗的合理化。人們的知識有其發展性、演化性並非一陳不變。研究者相信對大多數人來說，建構主義是學習知識的好觀點，因為這樣的學習方式，知識對個體而言，才有意義。

因此，研究者認為假如乘法直式算則的概念理解不會造成學童的學習負擔的話，我們在教導學童學習直式算則的同時，也應讓學童理解相關概念。假如乘法直式算則概念的理解非常困難，此時為了減輕學童的學習負擔，不要讓我們的學童用累加的方式或者多步驟的方式去計算問題，我們可以考慮讓學童及早使用計算器，或者先學會計算規則的程序性知識，之後再慢慢的理解它。

(四)、學習乘法直式算則的社會議題

在建構主義的觀點下，文本分析和學童的問卷調查發現，八二年版的處理方式容易造成學童的學習負荷，同時也不是學童所喜歡的計算方式。這也使得學童家長認為很容易求得答案的計算問題，他的子女卻需要花很久的時間，寫很長的算式才把答案求出來，而且還容易做錯。所以這樣的處理方式，不僅衝擊了學童家長，也衝擊了國小老師。老師們原本也是習慣於使用簡潔的方式快速求得答案，現在卻必需耐著性子讓學童慢慢的求出答案。這也難怪，有些老師開始懷疑的詢問研究者，我們是不是要這樣慢慢的讓學童理解乘法直式算則。也有一些想要照著國編本走的教師向研究者反應，很多學童們早就在補習班或者家長的教導下學會了乘法直式算則。研究者更從教學觀摩中，看到有些老師早就迫不及待的教導學童乘法直式算則。

再者，我國學童在 1999 年第三次國際數學評量結果國中二年級成績名列第三，美國名列第九。我國之所以有這樣的好成績，有一部份的原因是我們的學童可以快速計算求得結果。因此數學教授滕楚蓮(2001)大聲急呼，如果東西沒壞，就不要全換。台灣的教育或許有些缺失，我們或許可以修正，但不要完全改變。以前的學子，利用乘法直式算則可以很快的求得答案，現在我們需要放棄這個方法？

毫無疑問的，八二年版國編本處理乘、除直式算則的方式，在社會上激起了不少漣漪，也衝擊了社會的學習環境。

(五)、乘法直式算則的概念理解難不難

雖然直式算則中， 29×314 的 2(9)乘以 3(14)時，看起來比較像是二個十的三個百倍，但是學童無法理解，所以國編本利用兩種形式的位值概念轉換以及一種等價關係的轉換方式，讓學童學習乘法的計算，但問卷調查發現，學童對於這種幾個百幾個十幾個一的幾倍的計算方式，答對驟降許多；同時，研究者訪談二位教師發現，在一個運算式當中需要兩種形式的位值概念轉換以及一種等價關係的轉換，許多五年級學童很難理解。這些證據充分顯示，若利用幾個十的幾倍的方式“直接”引導直式算則，對學童而言容易造成他們的學習負荷。

假如“直接”理解一個數學概念很難，我們或許可以考慮利用“間接”的方式理解它。

因為一個數學概念常有多重意義，例如，證明 $\sqrt{2}$ 是無理數，或者證明“若 $a+b>0$ 則 $a>0$ 或 $b>0$ ”，我們直接證明不好證，利用反證法就比較容易。因此，我們在學習乘法直式算則時，是不是一定要拘泥於利用“直接”的方式來理解乘法直式算則不可？

從問卷調查中發現，學童對於 143×34 的直式算則，可以理解 $(1)4(3) \times 34 = 136$ 所代表的意義是1360(或136個十)，也理解136是由 $(1)4(3) \times 34$ 算得，也就是說，學童理解直式算中的相關位值概念，學童理解136的6是十位數是對齊143的4(40或4個十)而來。同時，調查發現 $20 \times 700 = 14000$ 的問題對學童的學習負荷比5個十乘以3個百的問題少。因此，研究者認為以 $(1)4(3)$ 代表40的「幾千」的位值概念轉換為主軸的間接方式理解乘法直式算則，對學童的學習負荷最少，學童最容易理解。

(六)、學習乘法直式算則的過程中有助培養其他能力的議題

或許有人不認同研究者以學童學習負荷較少的方式教導乘法直式算則，而相信國編本發展直式算則的一系列學習過程中，也有助於其他能力的培養。研究者也認同能學會國編本處理直式算則的學童，他們的數學能力一定提升不少，例如，對學習較順利的學童很清楚的知道什麼時候要做那一種形式的位值概念的轉換，什麼時候要把它看成另一種等價關係。但是對於學習較不順利的學童呢？他們是否能很清楚的同時做這些轉換呢？

再者，研究者建議以「幾千」的位值概念轉換的方式學習乘法直式算則，不代表研究者不重視其他概念的學習，我們可以在教材之中適度的呈現兩種形式的位值轉換，以及國編本處理乘法概念的等價關係。研究者相信學童在學習國編本處理乘法直式算則的過程所學到的能力，也可以利用其他的方式讓學童學會。同時，研究者相信沒有一種能力是只能在學習乘法直式算則的過程中才能學到的。

1) 結論與建議

從上述文本分析，問卷調查和乘法直式算則的議題剖析，研究者做出下列的結論與建議：

(一)、結論

1、三年級以前學童幾乎需要使用累加的方式計算問題且需做乘法表徵的轉換

從國編本教材分析發現，我們的學童在三年級上學期雖然已開始記憶乘法基本事實，但是教材直到第七冊才出現簡潔的乘法算式。這也就是說，雖然三年級的學童已進入部份－全體運思期，但國編本在教材的處理上，三年級以前對於一位數、二位數、三位數乘以一位數，一位數乘以一位數、二位數，以及二位數乘以二位數的問題上，都是以「又一倍」、「又幾倍」、「又十倍」的累加方式進行。學童在累加時，有時需要寫好幾次的算式才能得出結果。

依據編輯小組人員的說法，乘法表徵「必須要求學童使用，學童才會掌握其意義」(蔣治邦等人，2000，p23)，因此我們在國編本教材上可以發現，三年級以前的學童必需運用累加的方式得出結果，再轉換寫成乘法算式。

2、四年級以上的學童計算乘法問題需做兩種形式的位值概念轉換和一種等價關係的轉換

編輯小組認為學童無法理解「某數的幾個十倍」和「幾個十的幾個十倍」的意義，所以國編本在四年級以後處理乘法問題時運用了「幾個十、幾個百和幾個千的幾倍」的方式。此時，學童在計算 29×24 的問題需要把29的2看成2個十，把24的2看成20，再利用等價關係變成20個十的2倍得出40個十，再和其它的結果相加。學童在數的計算上需要進行「幾千」和「幾個千」兩種形式的位值概念換以及一種等價關係的轉換。

3、學童在計算問題時需要使用多步驟的計算方式同時容易做錯

從國編本的教材分析發現，不管學童使用加法解答乘法問題，或者使用幾個十、幾個百和幾個千的幾倍解答乘法問題，學童需要運用多次的算式才能解答問題。

從學童的問卷調查發現，學童使用多個步驟的計算方式時，錯誤率增加，尤其是第三大題要求學童使用幾個百幾個十幾個一的幾倍來計算問題時，錯誤率增加三、四成。

4、五年級學童習慣於 20×700 而較不習慣5個十乘以3個百的位值概念乘法

從問卷調查分析，得知學童對於 $20 \times 700 = 14000$ 的答對率比5個十乘以3個百等於15個千的答對率高出一、二成以上，同時，研究者在批改答案時，也發現有些學童在問題旁邊把5個十乘以3個百寫成 50×300 。顯示大部份的學童在計算問題時較習慣 20×700 而較不習慣5個十乘以3個百的位值概念乘法問題。

5、五年級學童已經可以理解只需要「幾千」的位值概念的乘法直式算則也可以正確計算乘法問題

雖然國編本到第十冊還沒出現乘法直式算則，第一大題第七小題的問卷調查發現，有八成以上的學童可以理解直式算則計算過程中，數字的位值概念以及如何計算得出。同時，在第二大題中喜歡利用直式算則計算乘法問題的學童佔了76.6% $((67+12+69+6)/(67+12+69+6+16+5+23+3))$ 人次，其中有88.3% $((67+69)/(67+12+69+6))$ 人次的學童已經學會利用乘法直式算則正確計算結果。調查結果顯示，五年級上學期的學童已經可以以間接的方式理解乘法直式算則計算過程中的意義，而且可以正確計算結果。

6、學童使用幾個百幾個十幾個一的幾倍的計算方式學習負荷量大

從文本分析發現，在學習利用幾個百幾個十幾個一的幾倍的計算方式過程中，我們需要在一個式子中兩種形式的位值概念轉換和一種等價關係的轉換。再從第一大題第6小題的調查發現，學童對於幾個百幾個十幾個一的幾倍的直式算法中數字的由來有混淆的現象。第二大題調查發現大多數學童喜歡利用直式算則計算問題。第三大題要求學童使用幾個百幾個十幾個一的幾倍計算問題時，發現學童的答對率驟降。而且乘法錯誤，對位錯誤以及無法完整做完的學童都增加許多。這些情形都指出利用幾個百幾個十幾個一的幾倍的乘法計算方式對學童而言學習的負荷量大。

(二)、建議

最後，研究者提出九年一貫課程有關學童“理解乘、除直式算則”的建議：

1、以只需「幾千」的位值概念轉換為主軸做為理解直式算則的概念過程

直式算則的理解，例如， 29×314 的 $3(14)$ 乘 $2(9)$ 時，看起來比較像是二個十的三個百倍，或者二個十乘以三個百倍，但是它需要兩種位值概念轉換。另一種間接的概念理解方式，用 $20 \times 300 = 6000$ ，或者 20 的 300 倍，只需要一種位值概念轉換。這種位值概念的轉換也是國外教科書 Addison-Wesley(1995)和 ScottForesman(1994)用來處理乘法直式計算的方式。問卷調查顯示，學童習慣於利用這種方法計算幾個十乘以乘個百的問題。因此研究者相信這種「幾千」的位值概念轉換，可以讓學童理解整個乘法直式算則的程序概念，也可以減低學童的學習負荷。

當然，研究者認為小數的乘法直式算則，也可以利用「幾千」的位值概念的轉換讓學童理解，所以並沒有編輯小組成員擔心的整數概念與小數概念不相連結的問題。

2、五年級的學童可以理解以「幾千」的位值概念做轉換為主軸的全數乘法直式算則

從文本分析和問卷調查結果發現，若用累加的方式或用幾個百幾個十幾個一的幾倍等方式進行乘法計算，對學童的學習會造成負荷。所以研究者相信學童不會因此而更理解數學，更喜歡數學，反而會覺得很煩，不喜歡數學。為了減低學童學習的負荷，我們應該及早讓學童學習乘法直式算則，利用只需「幾千」的位值概念轉換為主軸的方式，讓學童理解直式算則的程序概念。讓學童理解在數學的文化裏面，有一種可以簡潔的方式解決乘法的問題。因此，研究者認為五年級的學童就應該學習直式算則。況且問卷調查結果也發現，五年級的學童已經學會了利用乘法直式算則計算問題，同時也理解 $20 \times 300 = 6000$ ，6000 等於 6 個千的概念，也理解直式算則中的相關位值概念。所以，五年級的學童可以理解以「幾千」的位值概念轉換為主軸的直式算則程序概念。

或許有人會質疑研究者找尋的對象是台北市的學童，不具代表性。此時，我們或許可以做下列的推論。假如其他地區學童的學習能力不比研究樣本差，那他們一定可以理解「幾千」的位值概念轉換的直式算則概念。假如學童的學習能力比研究樣本差，那他們利用多步驟方式學習直式算則，挫折感一定更大；反之，“間接”學習以「幾千」的位值概念轉換的直式算則概念更可以減少他們的學習負荷；假如，以「幾千」的位值概念轉換為主軸的直式算則概念理解，對他們而言會造成學習負荷時，那麼研究者相信，需要兩種形式的位值概念轉換，更會造成學童的學習負荷。

再者，研究者也曾對 149 位蘆州、五股和社子地區的五年級學童在上學期初的時候做過問卷調查(他們不是使用國編本教材)，發現學童對於 $20 \times 700 = 14000$ 的答對率有 76.5%；在 38×24 的直式算則中，有 67.1% 的學童理解 $(38 \times 2(0))76$ 是代表 760；有 81.2% 的學童理解 76 是由 38×2 得出。這些調查結果雖不及八成，但離八成不也遠。因此，假如我們把強調多步驟算式的時間用來加強以「幾千」的位值概念轉換為主軸的乘法概念，相信會有八成以上的可以理解直式算則的程序概念，相信五年級的學童可以解乘法直式算則。

3、「能嘗試理解乘、除直式算則」應該明列於第二階段或者不列入能力指標

從上述的結果分析，研究者建議，九年一貫課程能力指標假如要羅列乘除直式算則的理解的話，「能嘗試理解乘、除直式算則」應該提前明列於第二階段(假如 N-3-2 所言的直式算則包含全數和小數部份，那至少對於全數的乘、除直式算則部份)，同時以「幾千」的位值概

念做為理解直式算則的主軸。這樣子，才不會造成學童在計算問題上的學習負荷。

誌謝：本文是國科會專題研究計劃編號：NSC 90-2521-S-133-001-的部份結果。文中論點為作者所有，不代表國科會。本研究能順利完成，必須感謝所有參與的同學與教師們。研究者在此表達十二萬分的謝意。

參考文獻

- Addison-Wesley (1995a). *Mathematics, teacher's edition grade 3*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Addison-Wesley (1995b). *Mathematics, teacher's edition grade 4*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Addison-Wesley (1995c). *Mathematics, teacher's edition grade 5*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Addison-Wesley (1995d). *Mathematics, teacher's edition grade 6*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Albany, E. (1972). Times ancient and modern. *Mathematics in School, 1(5)*, 2-5.
- Baek, J. M. (1998). Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney(Eds.), *The teaching and learning of algorithms in School mathematics . 1998 Yearbook*(pp.151-160). National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.
- Broadbent, F.W.(1987). Lattice multiplication and division. *Arithmetic teacher, 34(7)*, 28-31.
- Brown, S.I.(1975). A new multiplication algorithm: On the complexity of simplicity. *Arithmetic teacher, 22(7)*, 546-554.
- NAEP(1988). *Mathematics objectives: 1990 assessment*. National Assessment of Educational Progress, Princeton, NJ.
- NCTM(1989). *Curriculum and evaluation Standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.
- ScottForesman(1994). *Exploring Mathematics, Teacher's Edition grade 4*. Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois.
- Sgroi, L. (1998). An exploration of the Russian Peasant method of multiplication. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney(Eds.), *The teaching and learning of algorithms in School mathematics . 1998 Yearbook* (pp.81-85). National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Reston, VA.
- Spickerman, W.R. (1971). A note on the Russian Peasant multiplication algorithm. *School Science and Mathematics, 71(7)*, 628-629.
- Travers, K. J., & Westbury, I. (Eds.)(1989). *The IEA Study of Mathematics I: Analysis of Mathematics Curricula*. Supplement. U.S., Illinois.
- 林福來 (1994)：八十三年度基礎科目數學考科試題研發工作計劃研究報告。大學入學考試中心。
- 國立編譯館(1999)：國民小學數學課本，第三冊。台北市：國立編譯館。
- Lee, Y.S. 乘法直式算則

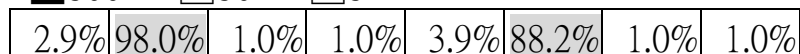
- 國立編譯館(1998)：國民小學數學課本，第四冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(1998)：國民小學數學課本，第五冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(2000)：國民小學數學課本，第六冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(1999)：國民小學數學課本，第七冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(2000)：國民小學數學課本，第八冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(2000)：國民小學數學課本，第九冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(1999)：國民小學數學課本，第十冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(2000)：國民小學數學教學指引，第八冊。台北市：國立編譯館。
- 國立編譯館(2001)：國民小學數學教學指引，第六冊。台北市：國立編譯館。
- 陳竹村 (1996)：國小數學科新課程中的算則，國教園地，第 57，58 期，29-40。
- 陳香蘭(2001)：孩子變笨了？國小建構式數學掀論戰。聯知合晚報，2001.02.16。
- 教育部(2000)：國民中小學九年一貫課程暫行綱要。教育部。
- 郭寶鶯(2001)：第三名實力，為何倒頭學十九名？中國時報，2001.02.15。
- 蔣治邦、陳竹村、陳俊瑜和林淑君(2001)：國小數學教材分析－分數的數概念與運算。教育部台灣省國民學校教師研習會。
- 蔣治邦，謝堅，陳竹村，吳淑娟和林昭珍(2000)：國小數學教材分析－整數乘除算則運算。教育部台灣省國民學校教師研習會。
- 滕楚蓮(2001)：學了新教材，覺得變笨了。中國時報，2001.02.14。

【附件一 問卷調查內容及結果】

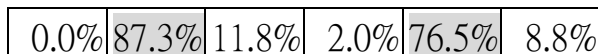
班級： ____年 ____班 姓名： _____

一、請你(妳)把正確的答案打√：(答案可能超過一個)

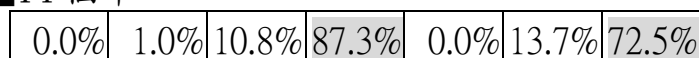
1. 3572 中 5 代表 5 個千 5 個百 5 個十 5 個一
5000 500 50 5



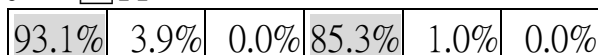
2. $700+800=$ 150 1500 150000 15 個十 15 個百 15 個萬



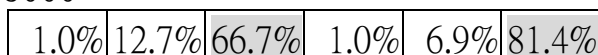
3. $20 \times 700 =$ 14 140 1400 14000 14 個一 14 個百 14 個千



4. 5 個百加 6 個百等於 11 個百 11 個十 11 個一
1100 110 11



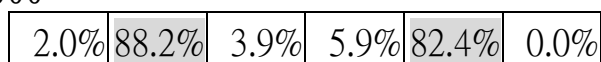
5. 5 個十乘以 3 個百等於 15 個一 15 個百 15 個千 15
150 15000



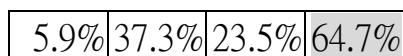
6.

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 314 \\ \hline 600 \\ \swarrow 20 \\ 8 \\ 2700 \\ 90 \\ 36 \\ \hline 9106 \end{array}$$

- (1). 左邊算式中的 20 實際上是代表 20 個百 20 個十 20 個一 20 200 2000



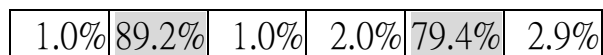
- (2). 左邊算式的 20 是由算式中的那一個式子算出來的? 4×5 20×1 2×10 2 個十乘以 10



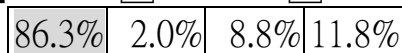
7.

$$\begin{array}{r} 143 \\ \times 34 \\ \hline 102 \\ \swarrow 136 \\ 34 \\ \hline 4862 \end{array}$$

- (1). 左邊算式中的 136 實際上是代表 136 1360 13600 136 個百 136 個十 136 個一



- (2). 左邊算式的 136 是由算式中的那一個式子算出來的? 4×34 6×34 8×17 2×68



二、請你(妳)儘量用兩種方法計算下面的問題，並且先做你(妳)最喜歡的方法。

(1). $46 \times 328 =$

● 最喜歡的方法

● 第二種方法

	方法一	方法二	小計
總回答人數	102	79	181
答對人數	83	63	146
答錯人數	19	16	35
答對率	81.4%		80.7%
算則答對	67	12	79
算則答錯	12	2	14
算則答對率	84.8%		84.9%
多步驟答對	16	51	67
多步驟答錯	5	14	19
多步驟答對率	76.2%		77.9%
算則：國編	376.2%		108.1%

(2). $37 \times 205 =$

● 最喜歡的方法

● 第二種方法

	方法一	方法二	小計
總回答人數	102	79	181
答對人數	92	72	164
答錯人數	10	7	17
答對率	90.2%		90.6%
算則答對	69	15	84
算則答錯	6	1	7
算則答對率	92.0%		92.3%
多步驟答對	23	57	80
多步驟答錯	3	6	9
多步驟答對率	88.5%		89.9%
算則：國編	288.5%		102.2%

三、「3 個百、5 個十、8 個一」的 257 倍，合起來是幾個百、幾個十、幾個一？注意：要用「幾個百幾個十幾個一的幾倍」的方法。

總回答人數	102
答對人數	55
答錯人數	47
答對率	53.9%
算則答對	31
算則答錯	10
算則答對率	75.6%
多步驟答對	24
多步驟答錯	31
多步驟答對率	43.6%
算則：國編	74.5%

Learning investigation of algorithm of multiplication

Yuan-Shun Lee

Department of Mathematics and Computer Science Education Taipei Municipal Teachers College

Abstract

Some parents, teachers, and mathematician question performance of '93 mathematics curriculum, their examples are about students learning of algorithm of multiplication and division. Now, The Mathematics Scenario of Nine-Year Curriculum Integration, in N-3-2 (sixth and seventh grades) Say: Try to comprehend algorithm of multiplication and division. Hence we want to investigation students' learning loading, and students' comprehension about algorithm of multiplication and division, then give some suggest of learning about algorithm of multiplication and division.

Research methods are text analysis and questionnaire. The textbooks of text analysis are National Institute for Compilation and Translation published. The students be surveyed that had used those textbooks four and a half years.

Text analysis found that students needs to use addition to calculate multiplication questions, and needs to transform to multiple representations in first three grades. After fourth grade, when students calculated multiplication questions, they needs to transform digits into two different place values, and use multiple steps method. Questionnaire survey found that fifth grade students are used to calculation by 20×700 , don't used to calculation by ten of five multiple hundred of three. Fifth grade students can comprehend concepts of multiplication algorithm p that used place value concept of "how thousand", and can correct calculation multiplication question. Text analysis and questionnaire survey found that students had much burden, when they calculate multiplication question with multiple steps method.

Researcher suggests that if we want reduce learning loading of students, we can teach the concepts of multiplication algorithm with transformation method of place value of "how thousand". If we want reduce learning loading of the processing knowledge of problem solving of students, fifth grade students will and can learning multiplication algorithm.

Keyword: algorithm of multiplication, place value, learning loading